CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 7 martie 2009

Filiera tehnologică : profil servicii, şi resurse naturale şi protecția mediului

CLASA a IX-a

1. Considerăm şirurile definite prin $a_n = 2n-1$ şi $b_n = 2^{a_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că (a_n) este o progresie aritmetică, iar (b_n) este o progresie geometrică.

b) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât : $a_1 + a_2 + ... + a_n = 2009^2$.

c) Calculați suma $S = b_1 + b_2 + ... + b_{2009}$.

2. Un inspector trebuie să controleze şase şcoli din şase localități: A, B, C, D, E, F. El are planificată verificarea într-o săptămână, câte o şcoală pe zi. Inspectorul poate parcurge doar următoarele trasee:
- de la A către F;
- de la B către A;
- de la C către B sau D sau E;
- de la D către A sau B;
- de la E către A sau B sau D sau F.

Să se demonstreze că el poate verifica toate şcolile şi că există un singur mod în care o poate face.

3. Fie ABC un triunghi, punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$ şi Q mijlocul segmentului (PM).

a) Arătați că : $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ şi $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{8}\overrightarrow{BA}$.

b) Demonstrați că punctele B, Q, N sunt coliniare şi calculați valoarea raportului $\frac{BQ}{QN}$.

4. La un concurs de jocuri, o echipă formată din trei elevi X, Y, Z, trebuie să-şi aleagă trei numere reale strict pozitive(fiecare elev câte un număr), astfel încât produsul lor să fie 1, iar suma lor să fie mai mare decât suma inverselor lor.

Să se demonstreze că:

a) Nici unul dintre elevi nu şi-a ales numărul 1.

b) Unul şi numai unul dintre ei şi-a ales un număr supraunitar.

Nota: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7